TRABAJO DE ÁLGEBRA LINEAL
Programa de Ing. Agroindustrial
Prof. Juan Deavila

Universidad de Sucre
Visible para todos
40 AÑOS

NOTA: Este trabajo se debe presentar el día () de () de 2018. Se debe trabajar en grupos de mínimo 4 estudiantes y máximo 6 estudiantes. Recuerde que la nota de este trabajo representa el 30 % de la nota final del segundo corte. **ESTOS SON ALGUNOS EJERCICIOS PARA ESTE TRABAJO.**

1. En los siguientes ejercicios se da un conjunto V de objetos junto con las operaciones suma y multiplicación por un escalar. Determine cuáles de los conjuntos son espacios vectoriales sobre el campo de los números reales. Para aquellos que no lo son, liste TODAS las propiedades que no se cumplen:

   a) $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para todo $(x_1, ..., x_n)$, $(a_1, ..., a_n) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x_1, .., x_n) + (a_1, ..., a_n) = (x_1 + a_1, ..., x_n + a_n)$$
   $$k \cdot (x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n)$$

   b) $V = \mathbb{R}^3$. Para todo (x, y, z), $(a, b, c) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$
   $$k \cdot (x, y, z) = (kx, y, z)$$

   c) $V = \mathbb{R}^3$. Para todo (x, y, z), $(a, b, c) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$
   $$k \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

   d) $V = \mathbb{R}^2$. Para todo (x, y), $(a, b) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$
   $$k \cdot (x, y) = (2ky, 2ky)$$

   e) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \text{y=0}\}$. Para todo (x, y), $(a, b) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$
   $$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$$

   f) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\}$. Para todo (x, y), $(a, b) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$
   $$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$$

   g) $V = \mathbb{R}^2$. Para todo (x, y), $(a, b) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$(x, y) + (a, b) = (x + a + 1, y + b + 1)$$
   $$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$$

   h) $V = \mathbb{R}$. Para todo x, $a \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$x + a = xb$$
   $$k \cdot x = x^k$$

   i) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{bmatrix}$$
   $$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

j) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, a, d \in \mathbb{R},\ b = c = 1 \right\}$. Para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

k) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, a, d \in \mathbb{R},\ b = c = 0 \right\}$. Para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

l) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

m) $V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, A = A^t\}$. Para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

n) $V = \{f \,|\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Para todo $f, g \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$(kf)(x) = kf(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

ñ) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(1) = 0\}$. Para todo $f, g \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$(kf)(x) = kf(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

o) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) \le 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$. Para todo $f, g \in V$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$(kf)(x) = kf(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

p) $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \,|\, a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$.
Para todo $P_n(x), Q_n(x) \in V$ y $k \in \mathbb{R}$, donde $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ y $Q_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$:

$$P_n(x) + Q_n(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_n + b_n)x^n$$

$$kP_n(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \cdots + ka_{n-1}x^{n-1} + ka_nx^n$$

q) $V = \{P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$. Con la suma y multiplicación usual en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

2. Consulte, estudie y explique la demostración de las siguientes afirmaciones:

   a) Un espacio vectorial no puede tener más de un vector neutro.

   b) En un espacio vectorial un vector no puede tener más de un vector inverso aditivo.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes?

   a) $(2, -1, 4), (3, 6, 2), (2, 10, -4)$

   b) $(3, 1, 1), (2, -1, 5), (4, 0, -3)$

   c) $(5, 0, -1), (1, 1, 4)$

   d) $(1, 3, 3), (0, 1, 4), (5, 6, 3), (7, 2, -1)$.

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ son linealmente dependientes?

   a) $2 - x + 4x^2$, $3 + 6x + 2x^2$, $2 + 10x - 4x^2$.

   b) $3 + x + x^2$, $2 - x + 5x^2$, $4 - 3x^2$.

   c) $6 - x^2$, $1 + x + 4x2$.

   d) $1 + 3x + 3x^2$, $x + 4x^2$, $5 + 6x + 3x^2$, $7 + 2x - x^2$.

5. En cada ejercicio siguiente determine si el conjunto S es una base para el espacio vectorial V:

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1, 2), (0, 3), (2, 7)\}$.

   b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $S = \{1 + x + x^2, x - 1\}$.

   c) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $S = \{1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x\}$.

   d) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2\}$.

6. Determine el espacio solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales y encuentre una base para él. Además, indique la dimensión de este espacio vectorial.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

7. Determine el espacio solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales y encuentre una base para él. Además, indique la dimensión de este espacio vectorial.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

8. En matemáticas se tiene el siguiente resultado:

   Teorema: Todo espacio vectorial V distinto del espacio vectorial $\{e\}$ tiene una base.

   Muestre que el espacio vectorial $V = \{e\}$ (e es el elemento neutro de V) no tiene base. Por tal razón se considera que la dimensión de este espacio es cero. (de dimensión finita)